

1. Se considera el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Sean las bases $B_c = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $B = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$.

a) Calcule las matrices de cambio de base $P_{B \rightarrow B_c}$ y $P_{B_c \rightarrow B}$.

b) Obtenga las coordenadas del vector $(1, 1, 1)$ en la base B .

$$V \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{V} = (x, y, z)_{B_c} \quad \vec{V} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

a)

$$P_{B \rightarrow B_c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_c}$$

$$(0, 1, 1)_{B_c} = (1, 0, 0)_B$$

$$P_{B_c \rightarrow B} = (P_{B \rightarrow B_c})^{-1} \quad P_{B_c \rightarrow B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_B$$

$$(1, 1, 1)_{B_c} = \frac{1}{2} \cdot (0, 1, 1) + \frac{1}{2} (1, 0, 1) + \frac{1}{2} (1, 1, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_B$$

2. Se considera el espacio vectorial $(\mathbb{R}_2[x], +, \cdot)$. Sean las bases $B_c = \{1, x, x^2\}$ y $B = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$.

a) Calcule las matrices de cambio de base $P_{B \rightarrow B_c}$ y $P_{B_c \rightarrow B}$.

b) Obtenga las coordenadas del polinomio $p(x) = 1 + 2x^2$ en la base B .

a)

$$P_{B \rightarrow B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(0, 0, 1)_{B_c} = 1 + x + x^2 = (1, 1, 1)_{B_c}$$

$$P_{B_c \rightarrow B} = (P_{B \rightarrow B_c})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}_B$$

$$(1, 0, 2)_{B_c} = 1 \cdot (1, 0, 0) + -2(1, 1, 0) + 2 \cdot (1, 1, 1) = (1, -2, 2)_B$$

3. En el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ se considera el subespacio $U = \langle (1, 0, 1), (2, 2, 0), (0, 1, -1) \rangle$. $\rightarrow$ todas los vect de esa forma
- Determine una base de U , su dimensión, sus ecuaciones paramétricas y sus ecuaciones cartesianas.

$\{(1, 0, 1), (2, 2, 0), (0, 1, -1)\}$ es sistema generador $\checkmark$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ rg } A = 2 \rightarrow B_u = \{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\} \text{ Sist libre } \checkmark$$

- $\dim B_u = 2$

- Ecs paramétricas $\vec{v} \in U \quad \vec{v} = \lambda \cdot (1, 0, 1) + \mu (0, 1, -1) = (\lambda, \mu, \lambda - \mu) \quad \left. \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda - \mu \end{array} \right\}$

- Ecs cartesianas $\dim U = \dim \mathbb{R}^3 - n^\circ \text{ ecs cart.} \quad 2 = 3 - n; \quad n = 1$
 $\{z - x + y = 0\}$

4. En el espacio vectorial $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ se consideran los subespacios

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0\},$$

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 3y - t = 0, y + z - t = 0\}.$$

Determine la dimensión de $U + W$.

$$\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W) = 4 \rightarrow U + W = \mathbb{R}^4$$

$\boxed{U}$

- ecs cartesianas: $x + y = 0 \quad \dim U = \dim \mathbb{R}_4 - n^\circ \text{ ecs} = 3$

$\boxed{W}$

- ecs cartesianas: $\left. \begin{array}{l} x + 3y - t = 0 \\ y + z - t = 0 \end{array} \right\} \dim U = \dim \mathbb{R}_4 - n^\circ = 2$

$\boxed{U \cap W}$

- ecs cartesianas: $\left. \begin{array}{l} x + 3y - t = 0 \\ y + z - t = 0 \\ x + y = 0 \end{array} \right\} \text{ rg } A = 3 \quad \dim U \cap W = \dim \mathbb{R}_4 - n^\circ = 1$

5. En el espacio vectorial $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ se consideran los subespacios

$$U = \langle (1, 1, 2, 2), (0, 1, 3, 4), (1, 2, 0, 1) \rangle, \quad W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + 4z = 0, y + 2t = 0\}.$$

Obtenga una base y las ecuaciones de $U \cap W$.

$$\dim U = \dim \mathbb{R}^4 - \text{n}^{\circ} \text{ecs} \rightarrow \boxed{\text{n}^{\circ} \text{ecs} = 1}$$

U (Comprobar que son independientes para que sea base.

- Ecs para métricas: $\vec{v} \in U$; $v = \lambda \cdot (1, 1, 2, 2) + \mu (0, 1, 3, 4) + \alpha (1, 2, 0, 1) =$
 $= (\lambda + \alpha, \lambda + \mu + 2\alpha, 2\lambda + 3\mu, 2\lambda + 4\mu + \alpha)$

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda + \alpha \\ y &= \lambda + \mu + 2\alpha \\ z &= 2\lambda + 3\mu \\ t &= 2\lambda + 4\mu + \alpha \end{aligned} \right\}$$

- Ecs canónicas: $y = x + \mu + \alpha \rightarrow t = z + \mu + \alpha \rightarrow t + x - z - y = 0$

$U \cap W$

- Ecs canónicas: $\left. \begin{aligned} t + x - y - z &= 0 \\ x + y + 4z &= 0 \\ y + 2t &= 0 \end{aligned} \right\}$

- Ecs para métricas: $\boxed{t = \beta} \quad \boxed{y = -2\beta} \quad x = 2\beta - 4z \quad \boxed{x = -2\beta}$
 $\beta + 2\beta - 4z + 2\beta - z = 0; \quad \boxed{z = \beta}$

$$\vec{v} \in U \cap W \quad \vec{v} = (-2\beta, -2\beta, \beta, \beta) = \beta (-2, -2, 1, 1)$$

- $\dim U \cap W = \dim \mathbb{R}^4 - \text{n}^{\circ} \text{ecs} = \boxed{1}$

- $B_{U \cap W} = \downarrow (-2, -2, 1, 1)$

6. En el espacio vectorial $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ se tiene el subespacio

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - t = 0\}.$$

Determine un subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^4$ tal que $U \oplus W = \mathbb{R}^4$, estableciendo su base, sus ecuaciones paramétricas y sus ecuaciones cartesianas.

$$U \oplus W \text{ quiere decir } \rightarrow \begin{matrix} U+W=\mathbb{R}^4 \\ U \cap W = \{0\} \end{matrix} \quad \dim U + \dim W = \dim \mathbb{R}^4$$

$\boxed{U}$

$$\text{Ecs cartesianas: } x - y + z - t = 0 \quad \dim U = 3 \quad ; \quad \dim W = 4 - 3 = 1$$

$\boxed{W}$

$$(1 \ 1 \ 1 \ 0) \rightarrow \text{No debe cumplir ecs de } U \text{ (si no, } U \cap W \neq \{0\})$$
$$; \quad \text{rg } A = 3 \quad ; \quad B_W = \{(1, 1, 1, 0)\}$$

$$\text{Ecs paramétricas: } \vec{w} \in W \quad \vec{w} = \lambda \cdot (1, 1, 1, 0)$$

$$x = y = z = \lambda \quad t = 0$$

$$\text{Ecs cartesianas: } \left. \begin{matrix} x = y \\ y = z \\ t = 0 \end{matrix} \right\}$$